0の0乗を定義しよう！

近藤　博文 (県立吉田島農林高)

§1. はじめに

「$0^0 = 1$ ですか？」指数の拡張を扱うと, こういった質問がよくあることと思います。「$0^0 = 1$ とすると, 指数法則に矛盾する $\cdots$ 」こんな感じで今までやり過ごしてきましたが, 0^0 とは何なのか？それは定義可能なのか？ということについて, 考えていきたいと思います。

§2. 0^0 が数だったら

その昔, 0 はおろか負の数さえも数とは認められない存在でした。0^0 がそれと同列に語られるかどうかはさておき, まず

0^0 は実数である

と仮定して, どんな数になり得るかをみてみます。そのとき, 誰もが自然に満たしてほしいと考えるのが次の**指数法則**です。

指数法則　$a, b > 0,\ x,\ y$ が実数のとき, 次が成り立つ。

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$

(3) $(ab)^x = a^x b^x$

このどの条件からも $(0^0)^2 = 0^{0\times 2} = 0^0$ となり, $0^0 = 0$ または 1 となります。指数法則は 0^0 にとって, かなり強い条件です。

さて, 次のことがわかります。

事実

(1) $0^0 = 1$ とすると $0^x\ (x < 0)$ が実数値にとれない。

(2) $0^0 = 0$ とすると $0^x = 0\ (x < 0)$ となり, 指数法則は保存される。

ここで注目しておきたいのは, 数学 I のようにべきに負の数が出てこないような段階では $0^0 = 1$ に対する反論ができないという点です。しかも確率で次のような定理を習います。

重複試行の確率　試行 T の結果, 事象 A が起こる確率が p であるとする。試行 T を n 回繰り返したとき, 事象 A が r 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (r = 0, 1, \ldots, n)$$

である。ここで $p^0 = 1$ とする。

ここで, T として「1 個のサイコロを 1 回ふる」, A として「7 の目が出る」としてみましょう。T を 3 回繰り返して A が 0 回起きる確率を計算すると

$${}_3C_0 0^0(1-0)^{3-0} = 0^0$$

直感的に, これは 1 でないと困ります。これを引き合いに生徒から $0^0 = 1$ を主張されたらどうしましょう？
注　教科書によっては「正の数 p に対して $p^0 = 1$ と定める」と書いてあるものもあります。

§3. 指数拡張の自然な発想

$a \neq 0$ に対しての $a^0 = 1$ や負べき $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ は割り算 $a^n \div a^m = a^{n-m}$ からの自然な発想から生まれたであろうことは疑いの余地がありません。いま, 私たちはこの「割り算が許されない」0 を対象にしているので, この考えがそのまま使えないわけです。

そこで, ちょっと見方を変えてみます。そもそも割り算の商とは何でしょうか？ $a \div b$ は $b \times x = a$ となる x のことです。これは $1 \div 0$ が不能, $0 \div 0$ が不定になることの説明によく使われます。べきは系列

$$\cdots \to a^{-3} \to a^{-2} \to a^{-1} \to a^0 \to a^1 \to a^2 \to a^3 \to \cdots$$

において前項を a 倍すると次項になっているという関係を持っています。$0^0 = 0$ とした場合, すべての実数 x に対して $0^x = 0$ が導かれますが, これは上記の系列をきちんと満たしています。$a \neq 0$ のときは, 割り算によって逆向きの系列を作ることができますが, 0 で割ることができないという性質からそれが許されないだけで, 指数拡張の自然な発想をきちんと含んでいると私は思うのです。もちろん, $0^0 = 1$ はこの系列を崩してしまいます。

§4. 極限としての 0^0

「不定形 0^0」微分積分学の教科書にはよく出てきます。形式的に 0^0 の形になる極限はその値として様々なものが知られています。
例

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x = 1$

(2) $0 < a < 1,\ n, m$: 正整数に対して
$$\lim_{x \to +0} \left(a^{x^{-n}}\right)^{x^m} = 1\,(m > n),\ a\,(m = n),\ 0\,(m < n)$$

(3) $p > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^{\log_x p} = p$

これらの値が一定でないから, というのも 0^0 を考えない理由になりそうですが, みなさんはどうお考えでしょうか？

§5. $(-8)^{1/3}$ などとの違い

0^0 が定義可能かどうかという問題は $(-8)^{1/3}$ などが定義できない事情とは全く異なります。$(-8)^{1/3}$ は雰囲気として -2 と思いたいわけですが, 指数法則によると

$$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = ((-8)^2)^{1/6} = 64^{1/6} = 2$$

となってしまいます。0 はプラスでもマイナスでもない唯一の実数として, 負べきを考えることができます。こうしたあっさりと矛盾を生むものとは 0^0 は違う次元にあるものだと思います。

§6. 0^0 のゆくえ

今までの考察から $0^0 = 0$ である, というのが私の結論です。

- 何か他の事実と矛盾しないのか？
- そう定義して, 何か意味があるのか？
- 具体的なモデルが存在するのか？

これらのことは今日まで私自身がずっと考えてきたことでした。

今日の発表が最終的な結果を披露するものでなく, 議論をかもしだす材料になればと思っています。ご意見やご感想をたくさんいただければと思っています。

最後に, 重複試行の確率公式を修正しておきましょう。

$${}_nC_r(\lim_{x \to p+0} x^r)(1-p)^{n-r}$$

古典的なニュートンの公式を修正したアインシュタインを気どっているわけではもちろんありませんが。

e-mail： kondo@pa.airnet.ne.jp
URL：http://www.pa.airnet.ne.jp/kondo/
1998(平成 10) 年 11 月 18 日